Alger2021 : Dynamique collective, systèmes couplés, et applications en biologie/écologie
10-22 juil. 2021 Alger (Algérie)

Arezki KESSI

INTRODUCTION AUX SYSTEMES DYNAMIQUES
SYSTEMES DYNAMIQUES DISCRETS

Définition

Un système dynamique est un triplet (T, M, Φ) où T est un monoide noté additivement, M est un ensemble et une application $\Phi : T \times M \to M$ avec

$$\begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \Phi(t_1, \Phi(t_2, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x), \qquad \forall t_1, t_2 \in T \end{cases}$$

Dans la suite on s'intéresse aux cas où le monoide T est $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{Z}$. Ainsi la définition d'un système dynamique discret peut être formulée sous la forme suivante:

Définition

On appelle système dynamique la donnée d'un couple couple (X, ϕ) (dynamique à temps discret) où X, appelé espace des phases, peut être:
- un espace mesurable (X, τ): système dynamique mesurable
- un espace mesuré (X, τ, μ): système dynamique mesuré
- un espace topologique (X, O): système dynamique topologique
- une variété différetielle (X, A): système dynamique différentiable

et où $\phi : X \to X$ est une application, appelée transformation du système dynamique à temps discret, qui vérifie respectivement:
- ϕ est mesurable
- ϕ préserve la mesure
- ϕ est continue
- ϕ est différentiable

Dans cet exposé on s'intéresse aux systèmes dynamiques à temps discret.

Un système dynamique à temps discret (X, ϕ), est dit inversible si l'application ϕ est bijective et l'espace $\left(X, \phi^{-1}\right)$ est aussi un système dynamique discret.

Conjugaison

Soient (X, ϕ) et (X', ϕ') deux systèmes dynamiques, à temps discret. Une semi-conjugaison de (X, ϕ) dans $(X', \phi'))$ est une application $h : X \to X'$ surjective telle que $h \circ \phi = \phi' \circ h$. On dit que h est une conjugaison si h est une bijection. Un système dynamique est semi-conjugué (respectivement conjugué) à un autre système dynamique s'il existe une semi-conjugaison (respectivement conjugaison) du premier dans le second.

Orbites

Soient (X, ϕ) un système dynamique et x un point de l'espace des phases X.

L'orbite positive de x notée $O^{+}(x)$ est $O^{+}(x) = \{\phi^{n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ avec $\phi^{0} = id$ et $\phi^{n+1} = \phi^{n} \circ \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (X, ϕ) est inversible, l'orbite de x, notée $O(x)$, est, en notant $\phi^{-n} = \left(\phi^{-1}\right)^{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O(x) = \{\phi^{n}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$

Types d'orbites

- Point fixe:

Un point fixe est un point x_0 qui satisfait l'égalité: $\phi(x_0) = x_0$. Il est à remarquer que dans ce cas $\phi^{n}(x_0) = x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'orbite d'un point fixe est donc une suite stationnaire. Exemple: $\phi(x) = x^{3}$; les points fixes sont: $1, -1$ et 0.

- Point périodique

Un point x_0 est dit périodique s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{n}(x_0) = x_0$. Le plus petit entier n qui vérifie cette relation est appelé période minimale de l'orbite du point x_0. Exemple: $\phi(x) = x^{2} - 1$; les points 0 et -1 sont des points périodiques de période minimale égale à 2. Si x_0 est un point périodique de période minimale k, alors x_0 est un point fixe de ϕ^{nk} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Point éventuellement fixe ou éventuellement périodique

x_0 n'est pas fixe ou périodique mais un point de son orbite est fixe ou périodique. Exemple: $\phi(x) = x^{2}$, $x = -1$, $\phi(x) = x^{2} - 1$, $x = 1$.

On notera $Per(\phi)$ l'ensemble des points périodiques.

Remarques

La semi-conjugaison h envoie point périodique sur point périodique

$$h(Per(\phi)) \subset Per(\phi')$$

et envoie toute orbite de (X, ϕ) dans une orbite de (X, ϕ')

$$\forall x \in X, h(O(x)) \subset O(h(x))$$

De plus, si $h : X \to X'$ est une conjugaison entre X et X' , alors x est un point périodique de (X, ϕ) si et seulement si $h(x)$ est un point périodique de (X', ϕ') et les périodes de x et $h(x)$ sont alors égales.

Définition

Soit $x \in X$ un point périodique de période p. On dira que le point périodique x est attractif s'il existe un voisinage U de x tel que pour tout $y \in U$, on a $\lim_{n\to\infty} \phi^{np}(y) = x$.

Si h est une conjugaison entre (X, ϕ) et (X', ϕ') a.lors x est un point périodique attractif de (X, ϕ) si et seulement si $h(x)$ est un point périodique attractif (X', ϕ').

Exemples

$\phi(x) = x^2 - 1,$

Les points $x = 0$ et $x = 1$ sont périodiques de période 2. Leur orbite est $\{0, 1\}$

Théorème de Sharcovski

Définition:

L'ordre de sharcovski est l'ordre de tous les entiers positifs ayant la forme:

$$3 \lhd 5 \lhd ... 2.3 \lhd 2.5 \lhd 2^2.5 \lhd ... \lhd 2^n ... \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1$$

Théorème de Sharcovski

Si ϕ admet un point périodique de période n, alors elle admet un point périodique de période tout nombre k, tel que $n \lhd k$.

Corollaire

Si ϕ admet un point périodique de période 3, alors elle admet des points périodiques de n'importe quelles périodes.

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est assez longue mais elle nécessite uniquement des outils classiques de mathématique entre autre le théorème des valeurs intermédiaires.

Dynamique symbolique

On considère l'ensemble des suites: $X = \left\{ x = (x_i)_{i \geq 0} : \forall i \geq 0, x_i \in \{0, 1\} \right\}$

Pour tous $x, y \in X$, on pose $d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^n}$

(X, d) est un espace métrique.

Théorème

Soit $x, t \in X$ et supposons $s_i = t_i$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$. Alors $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Inversement, si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, alors $s_i = t_i$ pour $i \leq n$.

Démostration

Si $s_i = t_i$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$, alors

$$d(s, t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^n} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

D'autre part, si $s_j \neq t_j$ pour un certain $j \leq n$, alors

$$d(s, t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

Par concéquent, si $d(x, t) < \frac{1}{2^n}$, alors $s_i = t_i$ pour $i \leq n$.

Application shift (décalage)

Définition

L'application shift $\sigma : X \to X$ est définie parγ

$$\sigma\left(s_0 s_1 s_2 ...\right) = \left(s_1 s_2 s_{3...}\right)$$

Proposition

L'application shift est continue sur X.

Démonstration

Soit $s = s_0 s_1 s_2 s_3 ....$ Montrons que σ est continue au point s. Soit $\varepsilon > 0$, on prend n tel $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. On choisit donc $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Si t est un point de X tel que $d\left(s, t\right) < \delta$ alors $t_i = s_i$ pour $i \leq n+1$. Maiss dans ce cas $\sigma\left(t\right) = s_1 ... s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} ...$ admet les même n premiers que $\sigma\left(s\right)$, alors $d\left(\sigma\left(s\right), \sigma\left(t\right)\right) \leq \frac{1}{2^n}$. Par suite σ est continue en s, et donc continue sur X, car s est quelconque dans X.

Points périodiques

- L'ensemble $Per\left(\sigma\right)$ des points périodiques de σ est dense dans X.

Démontration

Soit $\varepsilon > 0$ et $s = s_0 s_1 s_2 s_3 ...$ un point de X. Montrons qu'il existe un point périodique t de σ tel que $d\left(s, t\right) < \varepsilon$. Pour cela on prend n tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. On choisit t un point périodique de période $n+1$ tel que $t_i = s_i$ pour $i \leq n$. Alors $d\left(s, t\right) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

-Il existe une orbite dense dans X.

Démonstration

Il suffit de choisir un point de X qui contient toutes les conbinaisons possibles de longueur n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par exemple

$$s = 0\ 1\ 00\ 11\ 01\ 10\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 0000\ 1111\ 0111...$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in X$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $d\left(\sigma^m, t\right) < \varepsilon$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que les n premiers termes de t soient les mêmes que ceux de $\sigma^m\left(s\right)$.

DYNAMIQUE SUR LE CERCLE

Rotation du cercle

Soit $S_1 = \{s \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité du plan réel euclidien usuel. La rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ est l'homéomorphisme de S_1 dans S_1 défini par

$$z \mapsto e^{i\theta} z$$

Elle est dite rationnelle si $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$, et irrationnelle sinon.

Le système dynamique $\left(S_1, z \mapsto e^{i\theta} z\right)$ ainsi défini est inversible. Si $\theta = 2\pi\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et p et q premiers entre eux, alors tout point de S_1 est périodique de période q pour la rotation d'angle θ.

-Une rotation irrationnelle R_α n'a pas d'orbite périodique, et toute orbite est dense.

Démonstration

Soit $A \subset S_1$ la fermeture d'une orbite. Si cette orbite n'est pas dense dans S_1 alors $S_1 \backslash A$ est un overt non vide invariant par R_α qui est réunion d'intervalles overts disjoints. Soit I l'intervalle le plus long de ces intervalles. Comme la rotation préserve les distances, alors les itérés $R_{\alpha}^{n}(I)$ de I constituent une suite d'intervalles de même longueur, qui ne se rencontrent pas car sinon $S_1 \diagdown A$ contient un intervalle plus long que I. Comme α est irrationnel alors aucun itéré $R_{\alpha}^{k}(I)$ de I ne peut coincider avec I, car sinon l'extrémité x de I va coincider avec l'extrémité $x + k\alpha$ de $R_{\alpha}^{k}(I)$ c'est-à-dire on aura $x + k\alpha = x \bmod (1) \Longrightarrow k\alpha = l \Longrightarrow \alpha = \frac{l}{k}$. Par suite l'union des intervalles $R_{\alpha}^{n}(I)$ qui sencée être incluse dans $[0,1]$ n'est pas bornée, ce qui est une contradiction.

Homéomorphismes du cercle

Orientations

Etant donnés trois points a, b et c sur S_1, on dit que $c \in [a, b]$ si on passe par c quand on se déplace de a vers b suivant le sens trigonométrique.

On dit qu'un homéomorphisme $f : S_1 \to S_1$ préserve l'orientation si pour tous points a, b et c de S_1, $c \in [a, b] \Longrightarrow f(c) \in [f(a), f(b)]$

Un homéomorphisme du cercle, soit il préserve l'orientation soit il inverse l'orientation.

Lifting (relévement)

Soit $p : R \to S_1$, $p(t) = e^{2i\pi t}$ et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $F(t+1) = F(t) + 1$. Alors on peut définir $f : S_1 \to S_1$ par $f(p(t)) = p(F(t))$

A partir d'un homéomorphisme $f : S_1 \to S_1$, peut-on obtenir $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $F(t+1) = F(t) + 1$?

Définition

On appelle lift d'une application $f : S_1 \to S_1$ toute application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $p(F(t)) = f(p(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

Proposition

Chaque application $f : S_1 \to S_1$ qui préserve l'orientation admet un lift croissant $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De plus F est application strictement croissante et $F(t+1) = F(t) + 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

Démonstration

On construit d'abord F sur $[0,1]$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre tel que $p(a) = f(p(0))$. Posons $F(0) = a$ et $F(1) = a + 1$. Quand x croit de 0 à 1, $p(x)$ décrit tout le cercle dans le sens trigonométrique. Comme f préserve l'orientation alors $f(p(x))$ est une rotation simple dans le sens trigonométrique de $f(p(0))$. pour chaque $x \in]0,1[$ on définit $F(x)$ par l'unique point y compris entre a et $a+1$ tel que $p(y) = f(p(x))$.

On prolonge maintenant F sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante. Tout nombre $z \in \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $x + k$ avec $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{Z}$. On pose par définition $F(z) = F(x) + k$. Il est évident que F ainsi définie est strictement croissante et vérifie: $F(t+1) = F(t) + 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

Proposition

Soient F et G deux lifts de $f : S_1 \to S_1$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = F(t) + n$.

Démonstration

Soit F et G deux lifts de f.

$$\forall t\in\mathbb{R}, p\left(G\left(t\right)\right)=f\left(p\left(t\right)\right)=p\left(F\left(t\right)\right)$$

donc $\forall t\in\mathbb{R}, p\left(G\left(t\right)\right)=p\left(F\left(t\right)\right)$ d'où il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}, G\left(t\right)=F\left(t\right)+n$

Nombre de rotation

Théorème

Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $F\left(t+1\right)=F\left(t\right)+1, \forall\in\mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to\infty}\frac{F^{n}(x)}{n}$ existe et ne dépend pas de x.

Démonstration pour $x=0$

Lemme1

Supposons $k\leq F^{m}\left(0\right)<k+1$. Alors pour tou$t$ $n\in\mathbb{N}$, $nk\leq F^{mn}\left(0\right)<n\left(k+1\right)$

Démonstration

De l'hypothèse on déduit facilement que $F\left(t+m\right)=F\left(t\right)+m, \forall t\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{Z}$. On démontre d'abord le lemme pour $n=2$.

Shant que F est strictement coissante en appliquant F^{m} à la double inégalité $k\leq F^{m}\left(0\right)<k+1$ on obtient $F^{m}\left(k\right)\leq F^{2m}\left(0\right)<F^{m}\left(k+1\right)$, ce qui est équivalent à $F^{m}\left(0\right)+k\leq F^{2m}\left(0\right)<F^{m}\left(0\right)+\left(k+1\right)$. En utilisant de nouveau la double inégalité $k\leq F^{m}\left(0\right)<k+1$, on obtient: $2k\leq F^{m}\left(0\right)<2\left(k+1\right)$.

Le $n>2$ se démontre par induction en appliquant successivement F^{m} à la double inégalité: $k\leq F^{m}\left(0\right)<k+1$.

Lemme2

Supposons $m,n>N$, pour un certain $N\in\mathbb{N}$. Alors $\left|\frac{F^{m}(0)}{m}-\frac{F^{n}(0)}{n}\right|<\frac{2}{N}$.

Démonstration

On va montrer que $\left|\frac{F^{m}(0)}{m}-\frac{F^{mn}(0)}{mn}\right|<\frac{1}{m}$. Notons qu'il existe un entier k tel que $k\leq F^{m}\left(0\right)<k+1$. D'après le lemme précédent on déduit que $nk\leq F^{mn}\left(0\right)<n\left(k+1\right)$. Alors $\frac{k}{m}\leq\frac{F^{m}(0)}{m}<\frac{k+1}{m}$ et $\frac{k}{m}\leq\frac{F^{mn}(0)}{mn}<\frac{k+1}{m}$, d'où $\left|\frac{F^{m}(0)}{m}-\frac{F^{mn}(0)}{mn}\right|<\frac{1}{m}<\frac{1}{N}$. En échangeant les rôles de m et n on obtient $\left|\frac{F^{n}(0)}{n}-\frac{F^{mn}(0)}{mn}\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$. En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient $\left|\frac{F^{m}(0)}{m}-\frac{F^{n}(0)}{n}\right|<\frac{2}{N}$.

Lla suite $\left(\frac{F^{n}(0)}{n}\right)$ est une suite de Cauchy donc elle est convergente.

Pour $x\in\mathbb{R}$ il existe un entier naturel k tel que $-k<x<k$. Sachant que F^{n} est croissante alors $F^{n}\left(-k\right)<F^{n}\left(x\right)<F^{n}\left(k\right)$, ce qui est équivaut à $F^{n}\left(0\right)-k<F^{n}\left(x\right)<F^{n}\left(0\right)+k$. Il s'en suit que $\lim_{n\to\infty}\frac{F^{n}(0)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F^{n}(x)}{n}$.

Posons $r\left(F\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^{n}(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(F^{n}(x)-x)}{n}$, avec F un lift d'une application $f:S_{1}\to S_{1}$ qui préserve l'orientation.

On a $r\left(F_{1}\right)=r\left(F_{2}\right)=F_{1}-F_{2}\in\mathbb{Z}$

Définition

Le nombre de rotation d'un homéomrphisme f est défini par $r(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} \mod(1)$ ou bien $r(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x)-x)}{n} \mod(1)$, où F est un relévement de f.

Proposition

Si f admet un point périodique alors $r(f)$ est rationnel

Démonstration

Si un point x est $q-$périodique alors $f^q(x) = x$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $p(y) = x$, alors $f^q(p(y)) = pF^q(y) = p(y)$ donc il existe p tel que $F^q(y) = y + p$. Par suite pour $m \in \mathbb{N}$ on a

$\frac{F^{mq}(y)-y}{mq} = \frac{1}{mq}\sum_{i=0}^{m-1} F^q\left(F^{iq}(y)\right) - F^{iq}(y) = \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$

Proposition

Soit f un homéomorphisme qui préserve l'orientation de S_1. Alors $r(f)$ est rationnel si et seulement si f admet un point périodique.

Démonstration

Il suffit juste de montrer que $r(f)$ est rationnel alors f admet un point périodique. Supposons que $r(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. D'après la définition du nombre de rotation on a

$$r(f^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left((f^m)^n(x) - x\right) = m \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn}\left(f^{mn}(x) - x\right) = mr(f) \pmod 1$$

alors $r(f^q) = 0$. Il suffit donc de montrer que si $r(f)$ est nul alors f admet un point fixe.

Supposons que $r(f) = 0$ et f n'admet pas de point fixe. Soit F le lift de f tel que $F(0) \in [0,1[$. Alors $F(x) - x \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, car si $F(x) - x \in \mathbb{Z}$ on aura $p(F(x)) = f(p(x)) = p(x)$, ce qui veut dire $p(x)$ est un point fixe de f. Dans ce cas d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a $0 < F(x) - x < 1$. Comme $F - Id$ est continue sur elle atteint ses bornes et donc il existe un nombre $\delta > 0$ tel queu

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

Du fait que la fonction $F - Id$ est périodique cette estimation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier on peut prendre $x = F^i(0)$ et en sommant de $i = 0$ à $i = n - 1$ on obtient

$$n\delta \leq F^n(0) < n(1-\delta)$$

Ce qui est équivalent à

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} < 1 - \delta$$

De cette double inégalité on obtient $\delta \leq r(f) \leq 1 - \delta$, ce qui une contradiction avec $r(f) = 0$.

Proposition

Soit f un homéomorphisme qui préserve l'orientation de S_1. Alors si $r(f)$ est rationnel tous les points périodiques ont la même période.

Démonstration

Soient F et H des lifts respectivement de f et h: $pF = fp$ et $pH = hp$. Alors H^{-1} est un lift de h^{-1}. De même $H^{-1}FH$ est un lift de $h^{-1}fh$. Supposons que H est tel que $H(0) \in [0,1[$. On va estimer l'expression

$$\left|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)\right| = \left|\left(H^{-1}FH\right)^n(x) - F^n(x)\right|$$

1) Pour $x \in [0,1[$ on a $0 - 1 < H(x) - x < H(x) < H(1) < 2$ et en vertu de la périodicité on obtient

$$|H(x) - x| < 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De même manière on obtient

$$\left|H^{-1}(x) - x\right| < 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Si $|y - x| < 2$ alors $|F^n(y) - F^n(x)| < 3$, car $|[y] - [x]| \leq 2$, et donc on a

$$\begin{aligned} -3 \leq [y] - [x] - 1 = F^n([y]) - F^n([x]+1) < F^n([y]) - F^n([x]) \\ < F^n([y]+1) - F^n([x]) = [y] + 1 - [x] \leq 3 \end{aligned}$$

Des deux estimations 1) et 2) on déduit

$$\left|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)\right| \leq \left|H^{-1}F^nH(x) - F^nH(x)\right| + \left|F^nH(x) - F^n(x)\right| < 2+3$$

alors

$$\frac{\left|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)\right|}{n} < \frac{5}{n}$$

Ce qui donne $r\left(H^{-1}FH\right) = r(F)$

Théorème

Si f et $g = h^{-1}fh$ sont deux homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation, conjugués par un homéomorphisme qui préserve l'orientation, alors leurs nombres de rotation sont égaux

Démonstration

Soit $r(f) = \frac{p}{q}$, avec p et q premier entre eux. Il suffit de montrer que pour tout point périodique $p(x)$ il existe un lift F de f pour lequel $F^q(x) = x + p$.

Si $p(x)$ est un point périodique et F un lift alors $F^r(x) = x + s$ pour certains $r, s \in \mathbb{Z}$ et

$$k + \frac{p}{q} = r(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}$$

On peut choisir F tel que $k=0$, et donc on aura $s=mp$ et $r=mq$. Si $F^q(x)-p>x$ alors d'après la monotonie on a

$$F^{2q}(x)-2p=F^q(F^q(x)-p)-p\geq F^q(x)-p>x$$

Par induction on obtient $F^r(x)-s=F^{mq}(x)-mp>x$ contradiction. De même pour le cas $F^q(x)-p>x$. Par suite $F^q(x)-p=x$.

FRACTIONS CONTINUES

Définition

On appelle fraction continue finie un nombre écrit sous la forme

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+ \atop {\ldots\ldots\atop +\frac{1}{a_k}}}}}$$

où $a_0,...,a_k$ sont des entiers et si $k\geq 1$, a_k sont supérieurs ou égaux à 1.

Pour simplifier l'écriture on note: $[a_0,...,a_k]$

Exemples

1. Tout entier $n\in\mathbb{Z}$ s'écrit comme une fraction continue : il sufit de prendre $k=0$ et $n=a_0$.

2. Le nombre $\frac{1}{2}$est une fraction continue, avec $k=1$, $a_0=0$ et $a_1=2$.

3. Le nombre $\frac{4}{3}$ s'écrit comme fraction continue : $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$, donc $k=1$, $a_0=1$ et $a_1=3$.

4. Le nombre $\frac{3}{4}$ s'écrit comme une fraction continue : $\frac{3}{4}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$, et donc $k=2$, $a_0=0$, $a_1=1$ et $a_2=3$.

Proposition

. Tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction continue finie.

Démonstration

Il suffit d'utiliser l'algorithme d'Euclide. : dans l'écriture $[a_0,...,a_k]$ d'un rationnel comme fraction continue, $a_0,...,a_k$ sont les quotients successifs dans les différentes étapes de

l'algorithme d'Euclide du numérateur par le dénominateur.

Exemple

$\alpha=\frac{25}{7}$

On a

$$\begin{aligned}25&=3*7+4\\7&=1*4+3\\4&=1*3+1\end{aligned}$$

Dans ce cas α peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{3*7+4}{7} = 3+\frac{4}{7}\\ &= 3+\frac{1}{\frac{1*4+3}{4}} = 3+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}\\ &= 3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1*3+1}{3}}} = 3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

Définition
On appelle fraction continue infinie une expression de la forme

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+ \atop {\cdots\cdots \atop +\cdots\cdots}}}} \tag{1}$$

où a_0 est entier et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
Pour simplifier l'écriture on note: $[a_0, a_1...]$
Algorithme de construction de la fraction continue associée à ■
Soit α un nombre réel, qui n'est pas un entier. Alors $[\alpha] < \alpha$. Alors on pose $a_0 = [\alpha]$ et $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}}$ et donc a s'écrit sous la forme

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}$$

Si α_1 n'est pas entier, il peut à son tour être représenté sous la forme

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

avec a_1 entier et $a_2 > 1$. On continue de même avec α_2. A chaque étape, on construit un nouveau réel $\alpha_i > 1$. Si α_i est entier, on obtient que α est égal à une fraction continue finie, et donc que α est rationnel. Si α_i n'est pas entier, alors on pose $a_i = [\alpha_i]$ et $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\{\alpha_i\}} > 1$.

Si ce processus s'arrête à un moment, c'est qu'on est tombé sur un α_i entier, et que donc α est rationnel. Sinon, on construit ainsi étape par étape une fraction continue infinie dont les coeficients successifs sont les entiers $a_0, a_1, a_2, ...$ avec par construction $a_i \geq 1$ dès que $i \geq 1$.

Définition

Soit n un entier positif ou nul. On appelle réduite d'ordre n de la fraction continue infinie (1) la fraction continue finie

$$m = [a_0, ..., a_n]$$

Propriétés des réduites

Soit $\alpha = [a_0, ..., a_n, ...]$ un nombre réel.

Proposition

On définit les suites (p_n) et (q_n) par récurrence en posant

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1} \\ q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} \end{cases}$$

Alors pour tout $n \geq 0$, la réduite m d'ordre n de α est égale à la fraction $\frac{p_n}{q_n}$

Démonstration

Pour $n = 0, 1, 2$ c'est vérifié

Pour vérifier à l'ordre $n+1$, sachant qu'elle est vraie pour n on utilise la fontion

$$f_n(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 +}}} \\ \cdots\cdots \\ + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}$$

.

Alors par hypothèse de récurrence, $f_n(a_n) = r_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}$, donc $r_{n+1} = f\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

.

Proposition

Soient p_n et q_n les suites définies par les relations de récurrence ci-dessus. Alors

pour tout $n \geq 1$, on a

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

Démonstration

La formule est vraie pour $n = 1$.. Supposons-la vraie pour un certain $n \geq 1$. Montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. D'après les relations de récurrence on a

$$\begin{aligned} p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n &= p_n (q_n a_{n+1} + q_{n-1}) - (p_n a_{n+1} + p_{n-1}) q_n \\ &= p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -(p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

.

Proposition

. Pour tout $n \geq 2$ on a

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

Démonstration

En utilisant les relations de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (p_{n-1} a_n + p_{n-2}) q_{n-2} - (q_{n-1} a_n + q_{n-2}) p_{n-2} \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}) = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

Proposition

On a

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3......$$

Démonstration

On a $q_0 = 1$ et $q_1 = a_1 \geq 1 = q_0$. Ensuite, la relation de récurrence $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}$ permet de voir que tous les termes suivants sont strictement positifs, vu que les entiers a_n,

$n \geq 1$ le sont. Alors pour tout $n \geq 1$, $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} > q_n * 1 + 0 = q_n$

Proposition

Les réduites d'indices pairs forment une suite strictement croissante

Les réduites d'indices impairs forment une suite strictement décroissante

Démonstration

D'après ce qu'on vient de voir on a pour

$n \geq 2$, $r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n - 2q_{n-1}}$

d'où le résultat.

Proposition

Toute réduite d'indice pair est inférieure à toute réduite d'indice impaire

Démonstration

On a d'après ce qui précède

$$r_{2k} - r_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{q_{2k}q_{2k+1}} = \frac{-1}{q_{2k}q_{2k+1}}$$

De la monotonie des deux suites d'indices pair et impair on déduit le résultat.

Proposition

La suite des réduites d'un nombre α converge vers α.

Démonstration

Les deux suites d'indices pair et impair constituent des suites adjacentes, donc elles convergent vers la même limite. La suite des réduites est donc convergente.

FORME GEOMETRIQUE DES FRACTIONS CONTINUES

Soit $w \in]0, 1[$ et $w = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ son développement en fractions continues. $w_{n+1} = \left\{ \frac{1}{w_n} \right\}$ et $k_{n+1} = \left[\frac{1}{w_n} \right]'$

On définit l'application $T : [0, 1] \to [0, 1]$ par $T : w \longmapsto \left\{ \frac{1}{w} \right\}$. Ce qui donne $T(w) = [k_2, k_3, ..., k_n, ...]$

On va étudier certaines constructions géométriques des nombres k_n

On pose

$$w = [k_1, k_2, ..., k_n, ...], \qquad w_n = [k_1, k_2, ..., k_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

w_n est la meilleur approximation de w par des rationnels dont les dénominateurs sont inférieurs ou égaux à q_n, $|w - w_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

Les nombres q_n vérifient les relations de récurrence $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1}$, avec $q_0 = 1$, $q_1 = k_1$

Soit S_1 le cercle unité. On note par R_w la rotation de S_1 d'angle w, $R_w \alpha = \alpha + w$, avec $\alpha \in [0, 1[$

Des inégalités

$$k_1 w \leq 1 < (k_1 + 1) w$$

on déduit que S_1 peut être recouvert par $k_1 + 1$ arcs de longueur w mais pas par k_1 arcs.

Soit $0 \in S_1$ un point fixé.

On note par $\Delta_1^{(0)}$ l'arc ouvert d'extrémités 0 et w.

Les arcs $\Delta_i^{(0)} = R_w^{i-1} \Delta_i^{(0)}$, $1 \leq i \leq k_1$ sont adjacent de longueur w et ne se rencontrent pas.

On note par $\Delta_1^{(1)}$ l'arc ouvert d'extrémités $k_1 w$ et 0.

Le rapport entre les longueurs des arcs $\Delta_1^{(0)}$ et $\Delta_1^{(1)}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{l\left(\Delta_1^{(1)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(0)}\right)} &= \frac{1 - k_1 w}{w} = \frac{1 - k_1 / \left(k_1 + [k_2, ..., k_n, ...]\right)}{1 / \left(k_1 + [k_2, ..., k_n, ...]\right)} \\ &= [k_2, ..., k_n, ...] = T(w) \end{aligned}$$

Sachant que $l\left(\Delta_1^{(1)}\right) < l\left(\Delta_1^{(0)}\right)$, on peut refaire le même procédé pour ces deux arcs. Si on note par m le nombre d'arcs $\Delta_1^{(1)}$ nécessaires pour recouvrir l'arc $\Delta_1^{(0)}$ on obtient

$$m l\left(\Delta_1^{(1)}\right) \leq l\left(\Delta_1^{(0)}\right) < (m+1)\, l\left(\Delta_1^{(1)}\right)$$

Ce qui est équivalent à

$$m \leq \frac{1}{T(w)} = \frac{l\left(\Delta_1^{(0)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(1)}\right)} < m + 1$$

Par concéquent on obtient $m = \left[\frac{1}{T(w)}\right] = k_2$

Notons par $\Delta_1^{(2)}$ l'arc de $\Delta_1^{(0)}$ non recouvert par les m arcs $\Delta_1^{(1)}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{l\left(\Delta_1^{(2)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(1)}\right)} &= \frac{l\left(\Delta_1^{(2)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(0)}\right)} \left(\frac{l\left(\Delta_1^{(1)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(0)}\right)}\right)^{-1} = \frac{1 - k_2 l\left(\Delta_1^{(1)}\right)\left(l\left(\Delta_1^{(0)}\right)\right)^{-1}}{T(w)} \\ &= \frac{1 - k_2 \left([k_2, ..., k_n, ...]\right)^{-1}}{\left([k_2, ..., k_n, ...]\right)^{-1}} = [k_3, ..., k_n, ...] = T^2(w) \end{aligned}$$

En continuant les itération on obtient$\frac{l\left(\Delta_1^{(n)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(n-1)}\right)} = T^n(w) = [k_n, k_{n+1}, ...]$

Si on recouvre l'arc $\Delta_1^{(n-1)}$ par m arcs $\Delta_1^{(n)}$ on obtient

$$ml\left(\Delta_1^{(n)}\right) \leq l\left(\Delta_1^{(n-1)}\right) < (m+1)\, l\left(\Delta_1^{(n)}\right)$$

Ce qui donne

$$m = \left[\frac{l\left(\Delta_1^{(n-1)}\right)}{l\left(\Delta_1^{(n)}\right)}\right] = \left[\frac{1}{T^n(w)}\right] = k_n$$

Géométriquement k_n représente le nombre d'arcs $\Delta_1^{(n)}$ nécessaires pour recouvrir l'arc $\Delta_1^{(n-1)}$

Exemples:

Le nombre d'or

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

$x = 1 + \frac{1}{x} \Longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
A_1 &: x \\
A_2 &: 1 - x \\
A_3 &: 2x - 1 \\
A_4 &: 2 - 3x \\
A_5 &: 5x - 3 \\
A_6 &: 5 - 8x \\
A_7 &: 13x - 8 \\
A_8 &: 13 - 21x \\
A_9 &: 34x - 21 \\
A_{10} &: 34 - 55x \\
A_{11} &: 89x - 55
\end{aligned}$$

1) Un intervalle de longueur x ne peut pas recouvrir $[0, 1]$, mais deux intervalles de longueur x peuvent recouvrir $[0, 1]$

2) Un intervalle de longueur $1 - x$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur x mais deux intervalles de longueur $1-x$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur x

3) Un intervalle de longueur $2 - 3x$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur $1 - x$ mais deux intervalles de longueur $2 - 3x$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur $1 - x$

4) Un intervalle de longueur $5x-3$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur $2-3x$ mais deux intervalles de longueur $5x-3$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur $2-3x$

....

Pour avoir ces recouvrements il est nécessaire d'avoir les conditions suivantes:

$1-x > \frac{x}{2} \Longrightarrow 3x < 2 \Longrightarrow x < \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{3}$

$2x-1 > \frac{1-x}{2} \Longrightarrow 5x > 3 \Longrightarrow x > \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

$2-3x > \frac{2x-1}{2} \Longrightarrow 8x < 5 \Longrightarrow x < \frac{5}{8}$ $\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} \ : \ \frac{5}{8}$

$5x-3 > \frac{2-3x}{2} \Longrightarrow 13x > 8 \Longrightarrow x > \frac{8}{13}$ $\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}} =$

$\frac{8}{13}$

$5-8x > \frac{5x-3}{2} \Longrightarrow 21x < 8 \Longrightarrow x < \frac{8}{21}$

$13x-8 > \frac{5-8x}{2} \Longrightarrow 34x > 13 \Longrightarrow x > \frac{13}{24}$

$13-21x > \frac{13x-8}{2} \Longrightarrow 55x < 34 \Longrightarrow x < \frac{34}{55}$

$34x-21 > \frac{13-21x}{2} \Longrightarrow 89x > 55 \Longrightarrow x > \frac{55}{89}$

$34-55x > \frac{34x-21}{2} \Longrightarrow 144x < 89 \Longrightarrow x < \frac{89}{144}$

$89x-55 > \frac{34-55x}{2} \Longrightarrow 233x > 144 \Longrightarrow x > \frac{144}{233}$

$\frac{20\,736}{133\,552} < x < \frac{20\,737}{133\,552}$

2) $x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$, avec $x > 1$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{x}$

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}} = \ldots$

$1 \to x \to 1-2x \to 5x-2 \to 5-12x \to 29-60x \to 149x-60 \to 149-358x \to 865x-358 \to 865-2088x$

1) Deux intervalles de longueur x ne peut pas recouvrir $[0,1]$, mais trois intervalles de longueur x peuvent recouvrir $[0,1]$

2) Deux intervalles de longueur $1-2x$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur x mais trois intervalles de longueur $1-2x$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur x

3) Deux intervalles de longueur $5x-2$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur $1-2x$ mais trois intervalles de longueur $5x-2$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur $1-2x$

4) Deux intervalles de longueur $5-12x$ ne peut pas recouvrir l'intervalle de longueur $5x-2$ mais trois intervalles de longueur $5-12x$ peuvent recouvrir l'intervalle de longueur $5x-2$

....;

$3 * 2088x + 865x = 7129x$

$3 * 865 + 358 = 2953$

$2953/7129 = 0.414\,22$

Références

1) Frédéric Paulin, Introduction aux systèmes dynamiques topologiques et différentiables,Cours de seconde année de Master, 2020-2021.

2) Anatole Katok and Boris Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge university press, 1995

3) YA. G. Sinai, Topics in Ergodic theory, Princeton university press, 1994

4) Robert L. Devaney, A first course in chaotic dynamical systems, Perseus Books Publishing, 1992