

Bifurcations

Tounsia.Benzekri

Université des sciences et de technologie HB – Faculté de mathématiques

Dynamique collective, systèmes couplés, et applications en
biologie/écologie

10-15 Juillet 2021

Théorème de Cauchy

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x . Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On considère un système différentiel autonome

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } x(t_0) = x_0.$$

Définition : Un point x^e est dit point d'équilibre (stationnaire, fixe), du système $\dot{x} = f(x)$, si $f(x^e) = 0$.

Définition : Les solutions de $\dot{x} = f(x)$ sont appelées orbites ou trajectoires.

Définition : L'ensemble de toutes les orbites du système différentiel $\dot{x} = f(x)$ est appelé le portrait de phase.

Définition : Stabilité d'un point d'équilibre

- Un point d'équilibre est dit stable si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \|x_0 - x^e\| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(t, x_0) - x^e\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

- x^e est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \rho > 0 \text{ tq } \|x_0 - x^e\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = x^e$$

- un équilibre qui n'est pas stable est dit instable

Systemes topologiquement equivalents

Définition :

Deux systemes différentiels $\dot{x} = f(x)$ (1) et $\dot{x} = g(x)$ (2) sont dit topologiquement equivalents s'il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du systeme (1) vers celles du systeme (2) en préservant l'orientation donnée par le temps t .

$$\forall t > 0, \forall x \in U \quad h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$$

où $\varphi(t, x)$ est l'orbite de (1) et $\psi(t, x)$ celle de (2).

Théorème de Hartman-Grobman :

Théorème

Soit le système différentiel autonome

$$\dot{x} = f(x)$$

et soit

$$\dot{x} = J_f(x^e)x$$

son système linéarisé au point d'équilibre x^e .

Si toutes les valeurs propres de la matrice $J_f(x^e)$ sont toutes à partie réelle non nulle, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du système non linéaire vers celle du système linéarisé dans un voisinage du point d'équilibre.

Théorème

Il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x^e , un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine et un homéomorphisme tel que $h(\varphi(t, x)) = e^{J_f(x^e)t} h(x)$

Ce théorème assure l'équivalence topologique locale entre un système non linéaire et le système linéarisé associé au point d'équilibre x^e .

Définition : Un point d'équilibre est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobienne n'ont pas de partie réelle nulle $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$. Si l'une des valeurs propres a une partie réelle nulle, le point singulier est dit non-hyperbolique.

Stabilité des équations différentielles

Si $f(x^e) = 0$, $x(t) = x^e$ est solution de $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

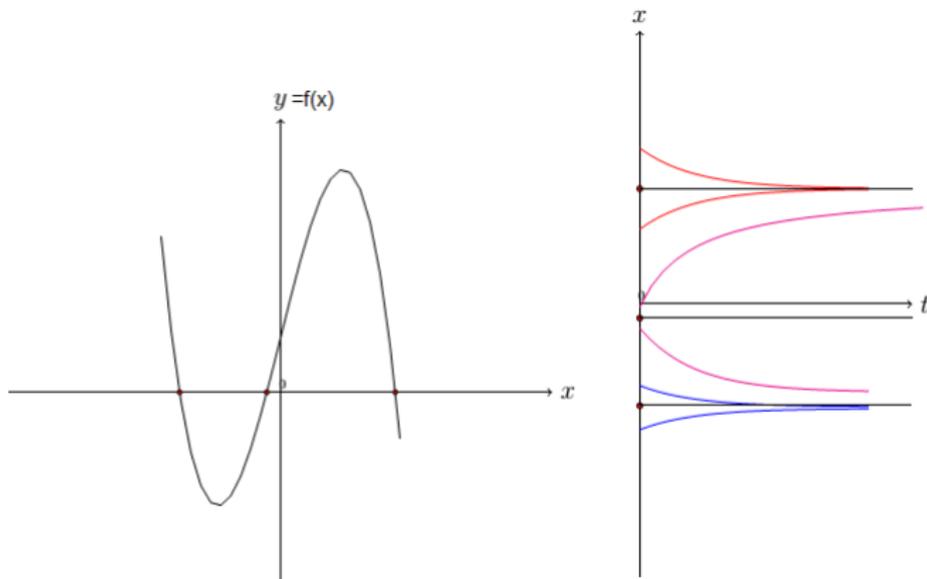
Si on prend une condition initiale $x(0) = x^e$, alors $x(t) = x^e$,
 $\forall t \geq 0$

Qu'est ce qui se passe si on prend une condition initiale $x(0)$
proche de x^e ($x(0) \neq x^e$) :

Deux possibilités :

- $x(t)$ va s'éloigner de x^e lorsque t augmente : l'équilibre est instable.
- $x(t)$ tourne autour du point d'équilibre : l'équilibre est stable.

Approche graphique pour déterminer la stabilité :



Approche analytique pour déterminer la stabilité :

Cas linéaire

on considère l'équation $\dot{x}(t) = ax$, $a \neq 0$ le point d'équilibre est $x^e = 0$.

- si $a < 0$, la solution décroît exponentiellement : l'équilibre est stable.
- si $a > 0$, la solution croît exponentiellement : l'équilibre est instable.

Cas non linéaire

Théorème

Soit x^e un point d'équilibre de $\dot{x}(t) = f(x(t))$, alors

- *si $f'(x^e) < 0$, alors le point d'équilibre est stable.*
- *si $f'(x^e) > 0$, alors le point d'équilibre est instable.*
- *si $f'(x^e) = 0$, on ne peut rien conclure.*

Soit

$$(*) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)), x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } x(t_0) = x_0.$$

avec $f(x^e) = 0$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(0)$. Alors

- Si $Re(\lambda_i) \leq -\sigma < 0, \forall i, i = 1, \dots, n$, alors x^e est un équilibre asymptotiquement stable de $(*)$.
- S'il existe i_0 tel que $Re(\lambda_{i_0}) > 0$, alors x^e est un équilibre instable de $(*)$.
- Si $\forall i Re(\lambda_i) \leq 0$ et il existe i_0 tel que $Re(\lambda_{i_0}) = 0$ alors on ne peut rien conclure.

Classification des points d'équilibre dans les systèmes de \mathbb{R}^2 :

Soient λ_1, λ_2 , les valeurs propres de la matrice jacobienne de f au point d'équilibre $X^e = (x^e, y^e)$, et v_1, v_2 les vecteurs propres associés à λ_1, λ_2 respectivement, alors

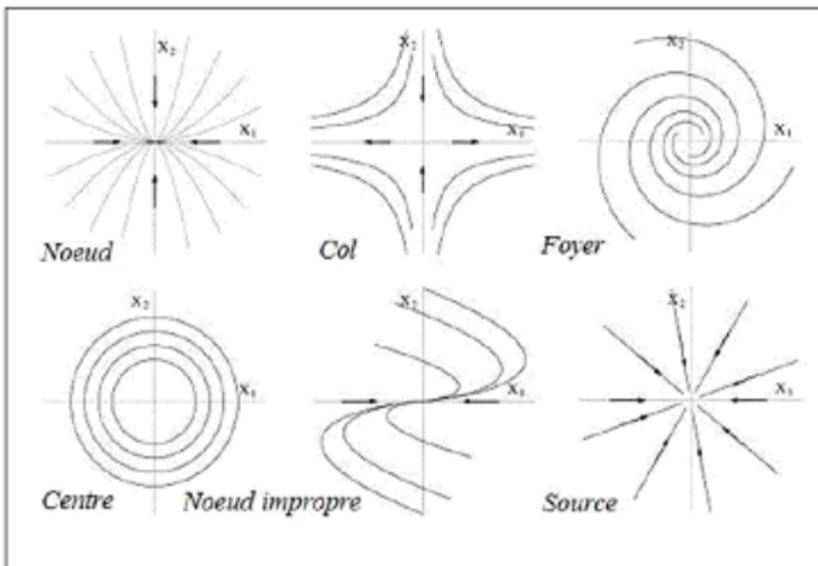
1er cas λ_1, λ_2 réels

- si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, X^e est un noeud stable (noeud attractif)
- si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, toutes les solutions s'éloignent vers ∞ quand $t \rightarrow +\infty$, X^e est un noeud instable (noeud répulsif)
- si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, v_1 engendre un sous-espace instable, v_2 engendre un sous-espace stable. X^e s'appelle un col ou un point selle.

2ème cas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$

- si $\alpha = 0$, les solutions sont toutes périodiques, X^e s'appelle un centre.
- si $\alpha < 0$, toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$; X^e s'appelle un foyer stable ou foyer attractif.
- si $\alpha > 0$, toutes les solutions tendent vers l'infini en module quand t tend vers $+\infty$, X^e s'appelle un foyer instable ou foyer répulsif.

Pour les points d'équilibre non hyperboliques, il n'existe pas de résultats généraux de conjugaison topologique du flot avec le linéarisé.



On considère un système différentiel $\dot{x} = f(x, c)$

Question : qu'est ce qui se passe pour ce système lorsqu'on fait varier le paramètre c ?

Deux possibilités : Le portrait de phase du système reste le même ou bien il y a un changement qualitatif de ce portrait de phase.

Définition : Stabilité structurelle

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Un champs de vecteurs $f \in \mathcal{C}^1$ est dit structurellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout champ de vecteur $g \in \mathcal{C}^1$ vérifiant $\|f - g\| < \varepsilon$ est topologiquement équivalent à f .

La stabilité structurelle signifie que les caractéristiques topologiques ne changent pas si on déforme un peu le champ de vecteur.

Remarque : L'hyperbolicité se conserve pour des petites perturbations. On dit que les points d'équilibre hyperboliques sont structurellement stables, à l'inverse des points d'équilibre non hyperboliques ; par exemple, les centres ne sont pas structurellement stables.

Soit

$$\dot{x} = f(x, c) \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour chaque valeur du paramètre c , il est possible de déterminer les points d'équilibre et leur propriété de stabilité et à chaque valeur de c correspondra un portrait de phase. Le nombre de points d'équilibre peut varier avec la valeur de c : un point d'équilibre asymptotiquement stable sur un certain intervalle de valeurs du paramètre c peut devenir instable sur un autre intervalle. Les changements qualitatifs du portrait de phase sont appelés des bifurcations et se produisent pour des valeurs particulières du paramètre c , appelé paramètre de bifurcation.

Exemple

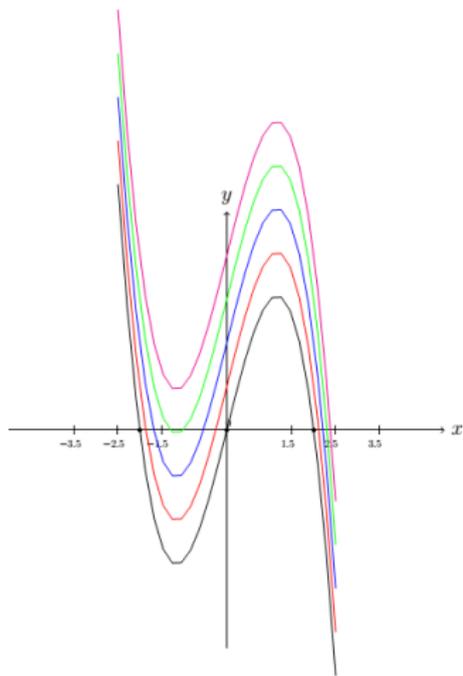


Figure: $f(x) = -x^3 + 4x + k$

La forme normale est donnée par :

$$\dot{x} = f(x, c) = c + x^2 \quad c \in \mathbb{R}$$

- $c < 0$, l'équation $c + x^2 = 0$ admet deux points d'équilibre :
 $x_1^e = \sqrt{-c}$ et $x_2^e = -\sqrt{-c}$
- $c = 0$, $\dot{x} = x^2$ admet un seul point d'équilibre non hyperbolique $x^e = 0$
- $c > 0$, l'équation $\dot{x} = c + x^2$ n'admet pas de points d'équilibre
 $\dot{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$, toutes les trajectoires tendent vers l'infini

Portrait de phase

Si on fait tendre c vers 0, on constate que les deux points d'équilibre $x_1^e = \sqrt{-c}$ et $x_2^e = -\sqrt{-c}$ se rapprochent et pour $c = 0$, ils fusionnent en un point d'équilibre $x^e = 0$ qui est non hyperbolique.

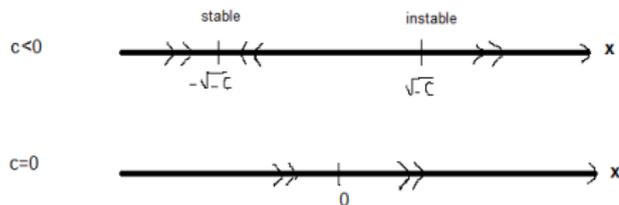
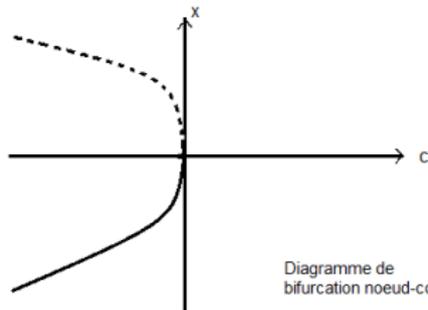


Diagramme de bifurcation

La bifurcation noeud-col consiste en la collision d'un noeud et d'un col qui s'annihilent l'un l'autre.



Remarque

Si la bifurcation noeud-col représente la collision et l'annihilation de deux points d'équilibre en fonction d'un paramètre, le phénomène inverse peut se produire. Une paire noeud-col peut apparaître en un point de l'espace des phase par variation du paramètre.

C'est le cas de la famille d'équations $\dot{x} = f(x, c) = x^2 - c$ pour $c < 0$, toutes les solutions croissent vers l'infini alors que pour $c > 0$ on a le noeud pour $x = -\sqrt{c}$ et le col pour $x = \sqrt{c}$ Le phénomène porte le nom de bifurcation noeud-col inverse.

$$(I) \quad \dot{x} = f(x, c), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$$

f possède pour $c = 0$ un point d'équilibre non hyperbolique :

- 1 $f(0, 0) = 0,$
- 2 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$
et deux autres conditions
- 3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0,$
- 4 $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0.$

On cherche à transformer le système (I) sous la forme

$$(II) \quad \dot{x} = x^2 + c,$$

par des changements de coordonnées et de paramètres et sous les conditions imposées en 1,2,3 et 4.

- étape 1 : on fait un changement de variables par translation.

On pose $\zeta = x + \delta$, on fait le dl de f au voisinage de $x = 0$,

$$f(x, c) = f(0, c) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, c) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c) + O(x^3).$$

On obtient une équation différentielle en ζ

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \left[f(0, c) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, c)\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c)\delta^2 + O(\delta^3) \right] \quad (1) \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c)\delta + O(\delta^2) \right] \zeta \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c) + O(\delta) \right] \zeta^2 + O(\zeta^3). \end{aligned}$$

On cherche à annuler le terme linéaire de l'équation (1)

On cherche donc $\delta = \delta(c)$ tel que $F(c, \delta(c)) = 0$, avec

$$F(c, \delta(c)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c)\delta + O(\delta^2)$$

On utilise le théorème des fonctions implicites :

$$\text{On a } F(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \delta}(0, 0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

$$\exists U \in V(0), V \in V(0), \text{ tel que } F(c, \delta) = 0, \forall c \in U$$

$$\text{et } \delta(0) = 0$$

$$\forall (c, \delta) \in U \times V, F(c, \delta) = 0 \Rightarrow \delta = \delta(c)$$

avec

$$\delta'(c) = \frac{d\delta}{dc}(c) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}(c, \delta)}{\frac{\partial F}{\partial \delta}(c, \delta)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c}(c, \delta) = \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x}(c, 0) - \frac{\partial^3 f}{\partial c \partial x^2}(c, 0)\delta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta}(c, \delta) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, \delta) + O(\delta)$$

$$\delta(c) = \delta(0) + c\delta'(0) + O(c^2) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}c + O(c^2),$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left[f(0, c) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, c)\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c)\delta^2 + O(\delta^3) \right] \quad (2) \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, c) + O(\delta) \right] \xi^2 + O(\xi^3) \end{aligned}$$

On fait le dl de f au voisinage de $c = 0$ jusqu'à l'ordre 2, on obtient

$$\dot{\xi} = \left[c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + O(c^2) \right] + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + O(c) \right] \xi^2 + O(\xi^3) \quad (3)$$

- étape 2 : introduire un nouveau paramètre

Soit $\mu = \mu(c) = c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + c^2 \varphi(c)$

On a $\mu(0) = 0$ et $\mu'(0) = \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0)$

- On suppose $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0$

Théorème des fonctions implicites : il existe $c = c(\mu)$, pour tout $\mu \in V(0)$ tel que $c(0) = 0$.

$$\dot{\xi} = \mu + a(\mu)\xi^2 + O(\xi^3)$$

avec $a(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$

- étape 3 : Soit $\eta = |a(\mu)| \xi$, $\beta = |a(\mu)| \mu$

$$\dot{\eta} = |a(\mu)| \dot{\xi} = \mu |a(\mu)| + |a(\mu)| a(\mu) \xi^2 + |a(\mu)| O(\xi^3)$$

$$\dot{\eta} = \mu |a(\mu)| + s\eta^2 + |a(\mu)| O(\xi^3) = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3)$$

$$s = \pm \text{signe}(a(0)) = \pm 1$$

Proposition

L'équation $\dot{x} = c + x^2 + O(x^3)$ est localement topologiquement équivalente au voisinage de l'origine à $\dot{x} = c + x^2$.

Théorème

On suppose que l'équation $\dot{x} = f(x, c)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ avec f régulière, possède en $c = 0$ un point d'équilibre $x = 0$ non hyperbolique.

On suppose de plus que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0$, alors, il existe un changement de variables et de paramètres qui transforme cette équation sous la forme.

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2$$

La forme normale d'une bifurcation transcritique est donnée par :

$$\dot{x} = cx + x^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

- $c < 0$, l'équation précédente admet deux points d'équilibre :
 $x_1^e = 0$ et $x_2^e = -c > 0$
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, c) = c < 0$ donc $x_1^e = 0$ est asymptotiquement stable.
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -c) = -c > 0$, $x_2^e = -c$ est instable.

- $c = 0$, l'équation

$$\dot{x} = x^2$$

admet un point d'équilibre non hyperbolique $x^e = 0$

- $c > 0$, l'équation

$$\dot{x} = cx + x^2$$

admet deux points d'équilibre $x_1^e = 0$ et $x_2^e = -c < 0$ et dans ce cas, x_1^e est instable et x_2^e est asymptotiquement stable.

Portrait de phase

Le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur nature change à la valeur de bifurcation $c = 0$.

A cette valeur, un point fixe stable et un point fixe instable se croisent en échangeant leur stabilité.

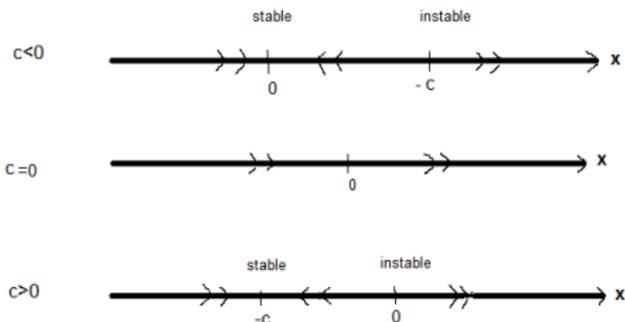
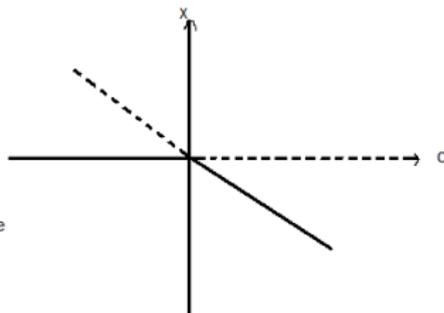


Diagramme de bifurcation

L'origine, qui est stable pour $c < 0$, devient instable pour $c > 0$, alors que le point d'équilibre x_2^e passe d'instable à stable .

Diagramme de bifurcation transcritique



Théorème

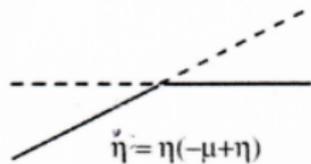
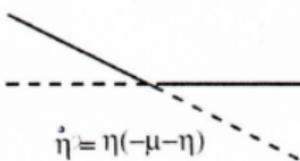
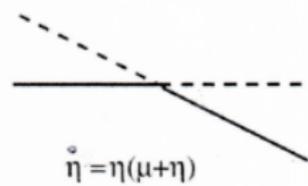
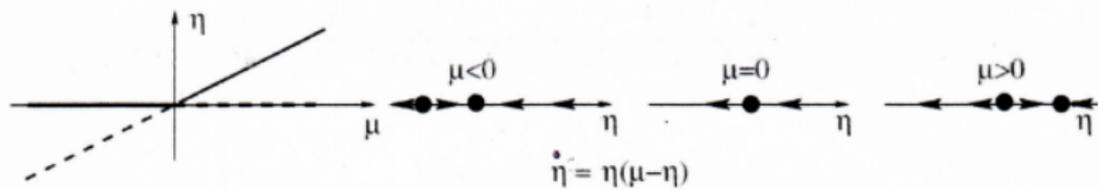
soit l'équation

$$\dot{x} = f(x, c) = xg(x, c)$$

supposons que ce système possède un point d'équilibre non hyperbolique au point $x = 0, c = 0$, vérifiant

$g(0, 0) = 0, \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial g}{\partial c}(0, 0) \neq 0$. Alors au voisinage de $(0, 0)$, l'équation est localement topologiquement équivalente à la forme normale suivante : $\dot{\eta} = \pm c\eta \pm \eta^2$ qui donne lieu à la bifurcation transcritique

Remarque Les conditions sur f sont données par $f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0,$



La forme normale d'une bifurcation fourche est donnée par :

$$\dot{x} = cx - x^3 = x(c - x^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

- $c < 0$, l'équation précédente admet un seul point d'équilibre : $x^e = 0$ asymptotiquement stable.
- $c = 0$, l'équation devient $\dot{x} = x^2$ admet un point d'équilibre non hyperbolique $x^e = 0$ cependant si $x > 0$, alors $\dot{x} < 0$ et si $x < 0$, alors $\dot{x} > 0$, par conséquent l'origine est asymptotiquement stable.
- $c > 0$, l'équation $\dot{x} = cx - x^3$ admet trois points d'équilibre $x_1^e = 0$, $x_2^e = -\sqrt{c}$ et $x_3^e = \sqrt{c}$. Le point $x_1^e = 0$ est instable et $x_2^e = -\sqrt{c}$, $x_3^e = \sqrt{c}$ sont deux points d'équilibre asymptotiquement stables.

$$\dot{x} = x(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c})$$

Portrait de phase

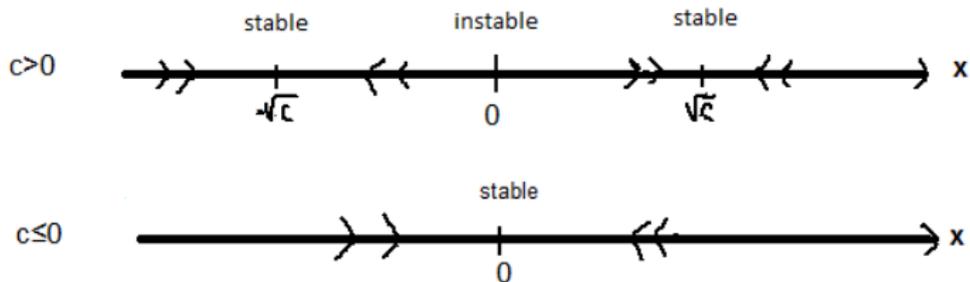
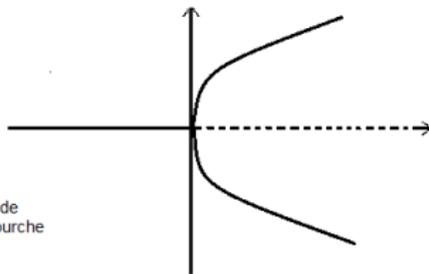


Diagramme de bifurcation

Ce diagramme montre que pour la valeur de bifurcation $c = 0$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois. Le point d'équilibre situé à l'origine, qui est stable pour $c < 0$, devient instable pour $c > 0$ en s'entourant de deux points d'équilibre stables $\pm\sqrt{c}$



Théorème

soit l'équation

$$\dot{x} = f(x, c)$$

supposons que ce système possède un point d'équilibre non hyperbolique au point $x = 0, c = 0$, vérifiant

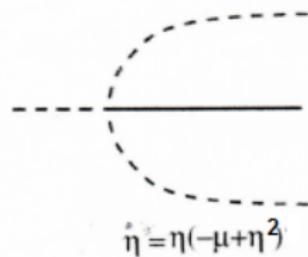
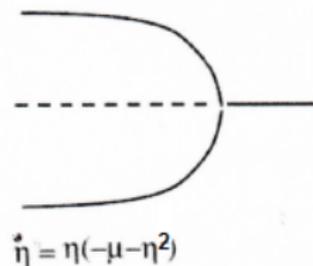
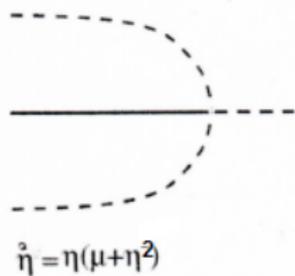
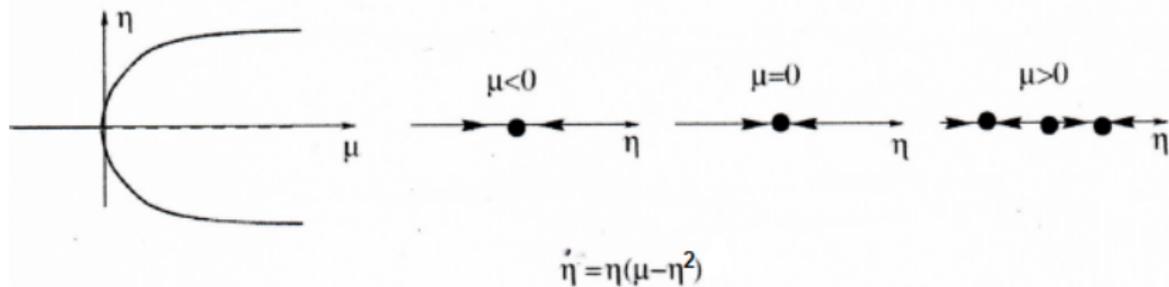
$$f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0.$$

Alors au voisinage de $(0, 0)$, l'équation est localement topologiquement équivalente à la forme normale suivante :

$$\dot{\eta} = \eta(\pm c \pm \eta^2)$$

qui donne lieu à la bifurcation fourche



Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad \dot{x} = c + x - x^3$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\dot{x} = c + f(x, 0)$$

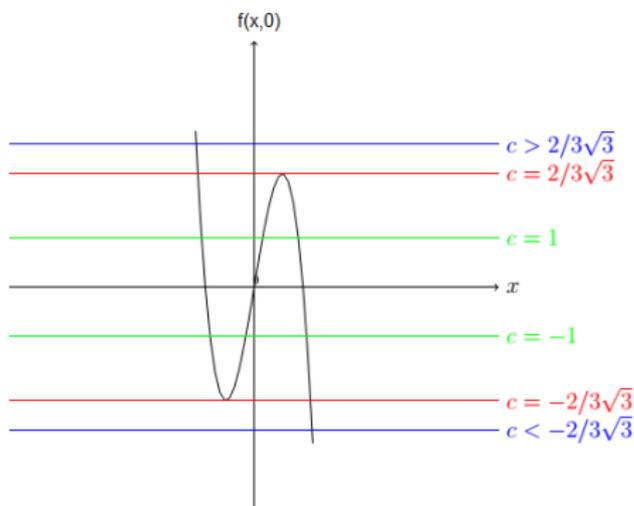
avec $f(x, 0) = x - x^3$.

Les points d'équilibre se trouvent à l'intersection de la courbe $f(x, 0) = x - x^3$ et la droite $x = -c$

si $c > 2/3\sqrt{3}$, (1) admet un point d'équilibre unique AS.

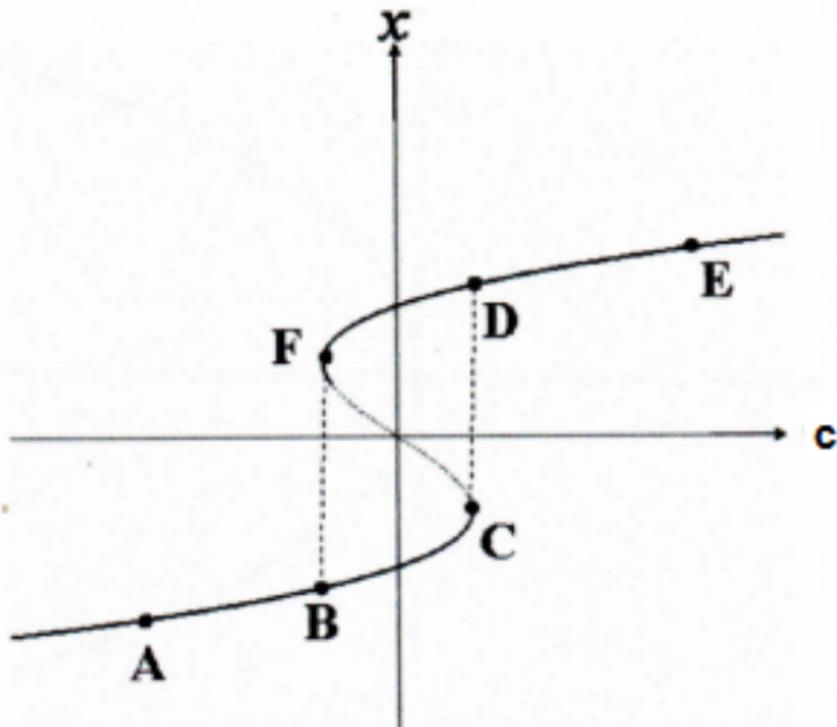
si $-2/3\sqrt{3} < c < 2/3\sqrt{3}$, (1) admet 3 points d'équilibre un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre AS.

si $c < -2/3\sqrt{3}$, (1) admet à nouveau un point d'équilibre unique AS.



Cycle d'hystérésis

Pour les valeurs du paramètre $c = \pm 2/3\sqrt{3}$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois et à nouveau repasse à un seul point.



On considère le système

$$(I) \quad \dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$$

et f régulière.

On suppose que ce système possède un point d'équilibre non hyperbolique, $x = 0$ pour $\mu = 0$

On considère le système étendu

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} ,$$

Dans une base propre, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{u} = g(u, v, \mu) & u \in \mathbb{R}^{n_c}, \\ \dot{v} = Av + h(u, v, \mu) & v \in \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}, \end{cases} \quad (4)$$

n_c nombre de valeurs propres nulles, n_s nombre de valeurs propres négatives et n_u nombre de valeurs propres positives.

Toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle non nulle et g et h sont des fonctions régulières et d'ordre $O(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Alors : (théorème de la variété centrale)

Il existe une variété centrale $W_\mu^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de dimension $n_c + 1$ et W_μ^c peut être représentée localement comme le graphe d'une fonction régulière :

$$W_\mu^c = \{(u, \mu, v) / v = \varphi(u, \mu), \text{ pour } |\mu| < \epsilon \text{ et } u \in V(0) \subset \mathbb{R}^{n_c}\}$$

et le système (4) se réécrit sous la forme :

$$\dot{u} = g(u, \varphi(u, \mu), \mu) = \Phi(u, \mu)$$

Théorème

Principe de réduction

Le système est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au système

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, \mu), \\ \dot{v} = Av \end{cases}$$

remarque :

- les équations sont découplées
- la première équation est la restriction du système (I) à W_μ^c
- La seconde peut être remplacée par

$$\begin{cases} \dot{v} = -v, \\ \dot{w} = w \end{cases}$$

La forme générale du système à étudier est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases}$$

On suppose qu'à $\mu = 0$, le système possède un point d'équilibre $(0, 0)$ et deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$

Le théorème précédent dit que le système est localement topologiquement équivalent à

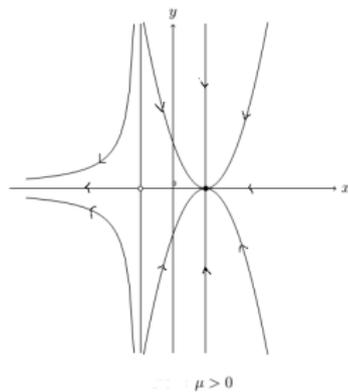
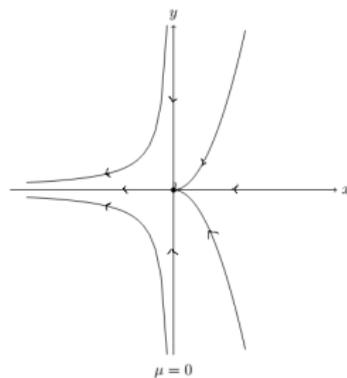
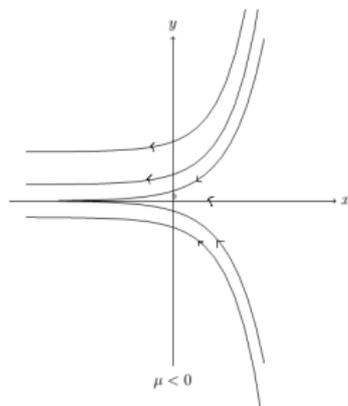
$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, \mu) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

Une des formes normales d'un système subissant une bifurcation noeud-col s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R},$$

- si $\mu > 0$, le système admet deux points d'équilibre, le point $(\sqrt{\mu}, 0)$ qui est un noeud asymptotiquement stable et le point $(-\sqrt{\mu}, 0)$ qui est un point selle.

Portrait de phase bifurcation noeud-col



Une des formes normales d'un système subissant une bifurcation transcritique s'écrit sous la forme

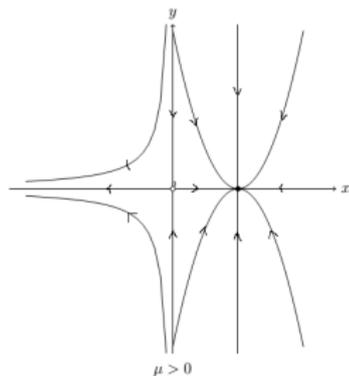
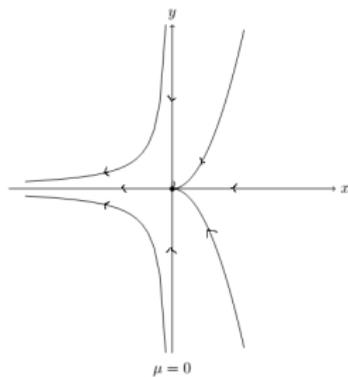
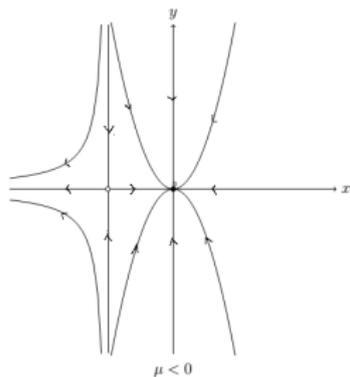
$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

- si $\mu > 0$, le système admet deux points d'équilibre, le point $(0, 0)$ qui est instable et le point $(\mu, 0)$ qui est stable.

- si $\mu = 0$, admet l'origine comme unique point d'équilibre qui est non hyperbolique.
- si $\mu < 0$, le point d'équilibre $(0, 0)$ est stable tandis que le point d'équilibre $(\mu, 0)$ est instable

Il y a donc échange de stabilité en $\mu = 0$ où il n'y a qu'un seul point d'équilibre.

Portrait de phase bifurcation transcritique



Bifurcation fourche

Une des formes normales d'un système subissant une bifurcation fourche s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

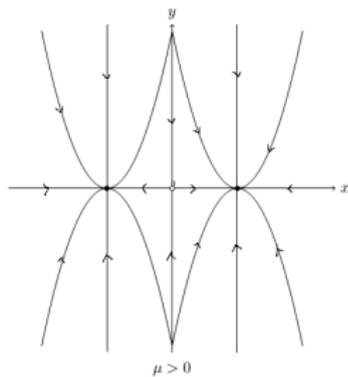
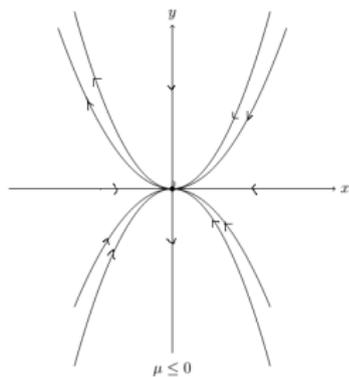
- si $\mu > 0$, le système admet trois points d'équilibre, le point $(0, 0)$ et deux points d'équilibre symétriques $(-\sqrt{\mu}, 0)$ et $(\sqrt{\mu}, 0)$. $(0, 0)$ est un point selle et les deux autres sont des noeuds asymptotiquement stables.

- si $\mu = 0$, le système admet l'origine comme unique point d'équilibre qui est non hyperbolique. On peut montrer qu'il est asymptotiquement stable (considérer la fonction de Liapounov $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$).
- si $\mu < 0$, le système admet un unique point d'équilibre $(0, 0)$ asymptotiquement stable.

En résumé, à la valeur du paramètre $\mu = 0$, le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un.

Pour $\mu > 0$, nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stable. Pour $\mu \neq 0$, le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

Portrait de phase bifurcation fourche



Soit

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, \mu)$$

On suppose que le système (1) admet un point singulier x^e pour $\mu = \mu_0$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$D_x f(x^e, \mu_0)$ admet (Hyp1)

- 0 comme valeur propre simple de vecteur propre v ,
- k valeurs propres de partie réelle strictement négatives.
- $n - k - 1$ valeurs propres de partie réelle strictement positives.

On note w un vecteur propre de la transposée ${}^t D_x f(x^e, \mu_0)$.

Bifurcation noeud-col

Théorème

Théorème Sotomayor

- ${}^t w D_\mu f(x^e, \mu_0) \neq 0$,
- ${}^t w (D_x^2 f(x^e, \mu_0)(v, v)) \neq 0$.

Théorème

Alors, il existe une courbe différentiable de points d'équilibre dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passant par (x^e, μ_0) et tangente à l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \mu_0$. Selon les signes des conditions dans , au voisinage de x^e , il n'y a aucun point d'équilibre si $\mu < \mu_0$ et il y a deux points d'équilibre si $\mu > \mu_0$. Les deux points d'équilibre sont hyperboliques et possèdent des variétés stables de dimension k et $k + 1$ respectivement

Bifurcation transcritique

Supposons que le système (1) admet un point d'équilibre vérifiant (Hyp1) avec les mêmes définitions de v et w .

- ${}^t w D_x f(x^e, \mu_0) = 0,$
- ${}^t w (D_x D_\mu f(x^e, \mu_0) v) \neq 0.$
- ${}^t w (D_x^2 f(x^e, \mu_0)(v, v)) \neq 0.$

Alors, il existe, localement près de (x^e, μ_0) , deux courbes différentiables C_1 et C_2 deux points singuliers de (1) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telles que.

- $C_1 \cap C_2 = (x^e, \mu_0)$
- On note C_1^- et C_2^- (resp. C_1^+ et C_2^+) les parties de C_1 et C_2 au dessus de $\mu < 0$ (resp. $\mu > 0$).
- C_1^- et C_2^+ (resp. C_1^+ et C_2^-) sont formés de points (x, μ) avec x point hyperbolique pour (1) à k (resp. $k + 1$) valeurs propres à parties réelles négatives.

bifurcation de Hopf supercritique

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Etude de la partie linéaire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + y \\ -x + cy \end{pmatrix}$$

Ce système admet un seul point d'équilibre, à l'origine. Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \tag{5}$$

sont complexes conjuguées : $\lambda_{1,2} = c \pm i$.

- Si $c < 0$, la partie réelle des valeurs propres est strictement négative, l'origine est asymptotiquement stable et correspond à un foyer.
- Si $c = 0$, l'origine correspond à un centre.
- Si $c > 0$, la partie réelle des valeurs propres est strictement positive, l'origine est un foyer instable.

A la bifurcation, pour la valeur du paramètre $c = 0$, l'unique point d'équilibre $(0, 0)$ change de nature : pour $c < 0$, on a un foyer asymptotiquement stable et pour $c > 0$, l'origine devient un foyer instable. L'origine correspond à des centres.

A la bifurcation, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire. Ainsi, lorsque $c = 0$, la partie réelle des valeurs propres s'annule donnant des centres et change de signe avec le paramètre c , l'origine passe d'un foyer asymptotiquement stable à un foyer instable.

Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre est égal à zéro. Du fait de la non linéarité du système, nous allons voir que ces centres ne sont pas conservés.

On passe en coordonnées polaires afin de préciser l'allure du portrait de phase.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

On dérive les deux dernières équations

$$\begin{cases} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(c - r^2) \\ \frac{d}{dt}(\tan(\theta)) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2(\theta)} \end{cases}$$

En coordonnées polaires le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

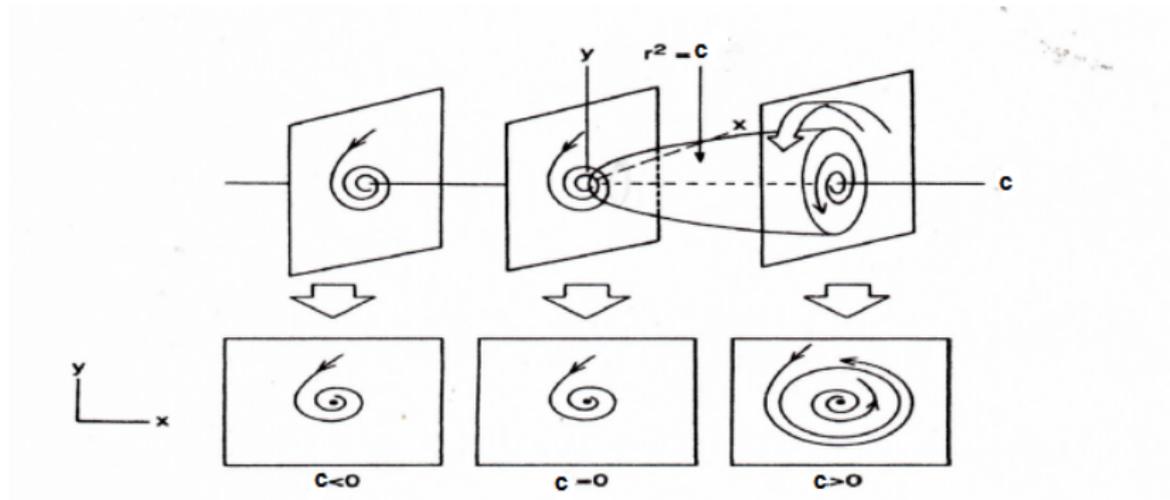
$\dot{\theta} = -1$ donne $\theta(t) = -t + \theta(0)$.

Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante $\omega = -1$. Les trajectoires vont tourner autour de l'origine. reste à étudier l'équation $\dot{r} = r^2(c - r^2)$

- si $c \leq 0$, cette équation admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est asymptotiquement stable.
- si $c > 0$, cette équation admet deux points d'équilibre $r = 0$ instable et $r = \sqrt{c}$ asymptotiquement stable.

Le second point d'équilibre correspond donc à un cercle de rayon $r = \sqrt{c}$ qui est une trajectoire fermée isolée, parcourue à la vitesse $\omega = -1$. C'est un cycle limite asymptotiquement stable.

A la bifurcation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable dont l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation.



Le Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf permet de démontrer l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite.

Théorème

Soit le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R},$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre $(x^e(c), y^e(c))$.

Soit $A(x^e(c), y^e(c))$ la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme $\lambda_{1,2} = a(c) + ib(c)$ avec $a(c)$ la partie réelle et $b(c)$ la partie imaginaire.

Théorème

Soit c^* une valeur particulière du paramètre c pour laquelle on a $a(c^*) = 0$, $b(c^*) \neq 0$ et $\frac{da}{dc}(c^*) \neq 0$.

Alors si $\frac{da}{dc}(c^*) > 0$, trois cas sont possibles :

- Lorsque $c = c^*$ (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de $(x^e(c^*), y^e(c^*))$: le point d'équilibre $(x^e(c^*), y^e(c^*))$ correspond alors à des centres. On parle de bifurcation de Hopf dégénéré.
- Lorsque $c = c^*$, le point d'équilibre $(x^e(c^*), y^e(c^*))$ est asymptotiquement stable et $\exists \tilde{c} > c^*$ tel que $\forall c, c^* < c < \tilde{c}$ il existe autour de $(x^e(c^*), y^e(c^*))$ qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{c - c^*}$. Dans ce cas, on parle de bifurcation de Hopf super-critique.

Théorème

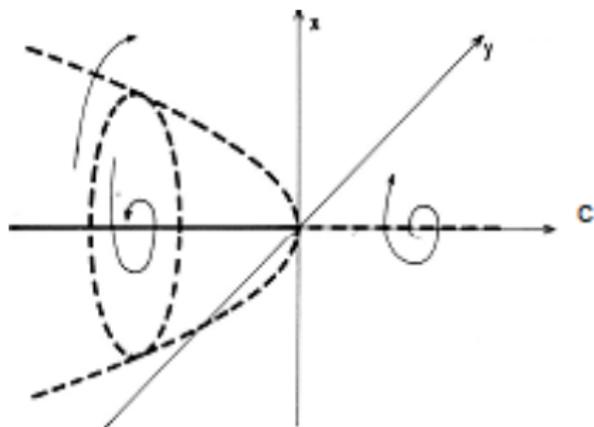
- Lorsque $c = c^*$, le point d'équilibre $(x^e(c^*), y^e(c^*))$ est instable et $\exists \tilde{c} < c^*$ tel que $\forall c, \tilde{c} < c < c^*$ il existe autour de $(x^e(c^*), y^e(c^*))$ qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable, dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{c - c^*}$. Dans ce cas, on parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

Remarque

Dans le cas $\frac{da}{dc}(c^*) < 0$, il faut inverser les conclusions, c'est à dire que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à c^* . Le théorème ne permet pas d'indiquer lequel des trois cas est le bon.

bifurcation de Hopf sous-critique

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$



Références

- Françoise J.P., Oscillations en biologie, Analyse qualitative et Modèles Collection Mathématiques et Applications SMAI Springer, Heidelberg, 2005.
- Guckenheimer J., Holmes P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag New York Inc, 2002.
- Perko L., Differential equations and dynamical systems, Springer-Verlag 2001.
- Strogatz Steven H., Nonlinear Dynamics and Chaos : with applications to Physics, Biology, Chemistry, and engineering. Perseus Books, 1994.